DOI：10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.05.004

一类分数阶哈密顿系统非平凡解的存在性*

程　伟，徐家发
（重庆师范大学数学科学学院，重庆 401331）

摘　要：利用变化的喷泉定理，研究了一类分数阶哈密顿系统。构造合适的工作空间和变分结构，在非线性项超二次增长的情形下获得该系统非平凡解的存在性，相关结论推广和改进了某些已有的结果。

关键词：分数阶哈密顿系统；喷泉定理；非平凡解

中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529-6579（2016）05-0021-06

Existence of nontrivial solutions for a class of fractional Hamiltonian systems

CHENG Wei, *XU Jiafa*
(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Using the variant fountain theorem, a class of fractional Hamiltonian systems are studied. With establishing appropriate work space and variational structure, the existence of nontrivial solutions for the superquadratic fractional Hamiltonian systems is obtained, and the obtained results extend and improve some known results.

Key words: fractional Hamiltonian systems; fountain theorem; nontrivial solutions

本文主要研究以下分数阶哈密顿系统非平凡解的存在性：

$$
\begin{gathered}
{}_tD_{\infty}^{\alpha}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)) + L(t)u(t) = \nabla W(t,u(t)), \\
u \in H^{\alpha}(\mathbf{R},\mathbf{R}^N) \qquad (1)
\end{gathered}
$$

其中 $\alpha \in (1/2,1)$，$t \in \mathbf{R}$，$u \in \mathbf{R}^N$，$W \in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$，$\nabla W$ 是 W 关于 u 的梯度。关于 $L(t)$，我们始终假设以下条件成立：

(L) 对任意的 $t \in \mathbf{R}$，$L \in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^{N^2})$ 是一对称的正定矩阵，且存在 $l \in C(\mathbf{R},(0,+\infty))$ 使得 $l(t) \to +\infty$，$|t| \to +\infty$ 以及

$$(L(t)u,u) \geqslant l(t)|u|^2, \forall t \in \mathbf{R}, u \in \mathbf{R}^N$$

近年来，对于分数阶问题的研究越来越受到人们的青睐，数学家们研究发现用新的分数阶模型能更精确地模拟现实问题。分数阶微分方程非常适合用来描述现实生活中具有记忆和遗传特性的问题，如：分形和多孔介质中的弥散、电容理论、电解化学、半导体物理、湍流、凝聚态物理、粘弹性理论、生物数学及统计力学等等，因此研究这类方程解的性质有理论和现实意义。在文［1］中，作者列举了大量分数阶模型在实际问题中的应用。例如电化学模型，Caputo 在讨论电化学的可极化介质时，提出电场 E 和电流密度 D 之间关系的分数阶模型，一维的情形为

$$\gamma D^{(v)} + \alpha D = \sigma E + \delta E^{(v)}$$

其中 $\gamma,\alpha,\sigma,\delta$ 皆为常数，$D^{(v)} = D^vD$，$E^{(v)} = D^vE$，ν 是实数。运用变分方法和临界点理论研究分数阶问题是比较新的课题，近期有很多学者致力于这方面的工作，参见文献［2-9］及其所附参考文献。

在文［2］中，Torres 运用山路定理研究了问题（1）非平凡解的存在性，其中 W 满足著名的

---

* 收稿日期：2016-03-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11371117）；重庆师范大学基金资助项目（15XLB011）
作者简介：程伟（1985 年生），男；研究方向：拓扑动力系统，微分方程；通讯作者：徐家发；E-mail：xujiafa292@sina.com

Ambrosetti-Rabinowitz 条件：

（AR）存在常数 $\mu > 2$ 使得

$$0 < \mu W(t,x) \leqslant (x, \nabla W(t,x)),\quad \forall (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$$

在文［3］中，在 W 次二次增长的情形下，作者运用亏格理论获得了问题（1）无穷多解的存在性。他们的具体条件是：

（FHS1）对任意的 $t \in \mathbf{R}, W(t,0) = 0$，且

$$W(t,x) \geqslant a(t)|x|^{\vartheta},$$
$$|\nabla W(t,x)| \leqslant b(t)|x|^{\vartheta-1},$$
$$\forall (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$$

其中，$1 < \vartheta < 2$，$a:\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ 是一有界连续函数，$b:\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ 是一连续函数且 $b \in L^{2/(2-\vartheta)}(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$；

（FHS2）存在常数 $1 < \sigma \leqslant \vartheta < 2$ 使得

$$(\nabla W(t,x), x) \leqslant \sigma W(t,x),\quad \forall (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$$

（FHS3）$W(t,x) = W(t,-x)$，

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N。$$

在文［4］中，在 W 次临界增长的情况下，作者运用喷泉定理获得了问题（1）高能量解的存在性，并运用山路定理和 Ekeland 变分原理获得了带有扰动项的分数阶哈密顿系统至少两个非平凡解的存在性（$N = 1$）：

$$ {}_tD_{\infty}^{\alpha}({}_{-\infty}D_t^{\alpha}u(t)) + L(t)u(t) = W_u(t,u(t)) + g(t), u \in H^{\alpha}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \quad (2)$$

受上述文献的启发，本文运用变化的喷泉定理研究问题（1）非平凡解的存在性，为此我们首先给出本文所使用的假设条件：

（H1）$W \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \mathbf{R})$，且存在 $d_1 > 0$ 和 $p \in (2, +\infty)$ 使得

$$|\nabla W(t,x)| \leqslant d_1(|x| + |x|^{p-1}),\quad \forall (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$$

（H2）$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{W(t,x)}{|x|^2} = 0$，对 $t \in \mathbf{R}$ 一致成立；

（H3）$W(t,x) \geqslant 0$，$\forall (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$，且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{W(t,x)}{|x|^2} = +\infty$，对 $t \in \mathbf{R}$ 一致成立；

（H4）存在 $d_2 > 0, L > 0$ 使得

$$(\nabla W(t,x), x) \geqslant \left(2 + \frac{d_2}{|x|^2}\right) W(t,x),\quad \forall t \in \mathbf{R}, |x| \geqslant L$$

定理 1 若条件（H1）－（H4）和（FHS3）成立，则问题（1）至少存在一个非平凡解。

1 基础知识

首先介绍有关 Liouville-Weyl 分数阶的计算。$\alpha(0 < \alpha < 1)$ 阶 Liouville-Weyl 分数阶积分定义为：

$$ {}_{-\infty}I_x^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x - \xi)^{\alpha-1} u(\xi) \mathrm{d}\xi \quad (3)$$

和

$$ {}_xI_{\infty}^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} (\xi - x)^{\alpha-1} u(\xi) \mathrm{d}\xi \quad (4)$$

由此可给出 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 阶 Liouvlle-Weyl 分数阶导数的定义：

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha}u(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} {}_{-\infty}I_x^{1-\alpha}u(x) \quad (5)$$

和

$$ {}_xD_{\infty}^{\alpha}u(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} {}_xI_{\infty}^{1-\alpha}u(x) \quad (6)$$

定义（5）－（6）式可以改写成以下形式

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha}u(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{u(x) - u(x - \xi)}{\xi^{\alpha+1}} \mathrm{d}\xi \quad (7)$$

和

$$ {}_xD_{\infty}^{\alpha}u(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{u(x) - u(x + \xi)}{\xi^{\alpha+1}} \mathrm{d}\xi \quad (8)$$

以下通过傅里叶变换来建立 Liouville-Weyl 分数阶积分算子、微分算子的性质。记 $u(x)$ 的傅里叶变换为 $\hat{u}(w)$，定义如下：

$$\hat{u}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx} u(x) \mathrm{d}x$$

令 $u(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，经过傅里叶变换可以得到如下的等式：

$$\widehat{{}_{-\infty}I_x^{\alpha}u(x)}(w) = (\mathrm{i}w)^{-\alpha} \hat{u}(w),$$
$$\widehat{{}_xI_{\infty}^{\alpha}u(x)}(w) = (\mathrm{i}w)^{-\alpha} \hat{u}(w) \quad (9)$$
$$\widehat{{}_{-\infty}D_x^{\alpha}u(x)}(w) = (\mathrm{i}w)^{\alpha} \hat{u}(w),$$
$$\widehat{{}_xD_{\infty}^{\alpha}u(x)}(w) = (-\mathrm{i}w)^{\alpha} \hat{u}(w) \quad (10)$$

以下构造问题（1）对应的变分结构，赋予 Banach 空间 $L^p(\mathbf{R}, \mathbf{R}^N)(p \in [2, +\infty)$ 的范数为

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbf{R}} |u(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

赋予 Banach 空间 L^{∞}（$\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^N$）的范数为

$$\|u\|_{\infty} := ess\ \sup\{|u(t)| : t \in \mathbf{R}\}$$

对于 $\alpha > 0$，定义半范数 $|u|_{I_{-\infty}^{\alpha}} = |{}_{-\infty}D_x^{\alpha}u|_{L^2}$ 及范数 $\|u\|_{I_{-\infty}^{\alpha}} = (\|u\|_{L^2}^2 + |u|_{I_{-\infty}^{\alpha}}^2)^{1/2}$。令

$$I_{-\infty}^{\alpha} = \overline{C_0^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^N)}^{\|\cdot\|_{I_{-\infty}^{\alpha}}}$$

下面介绍分数阶 Sobolev 空间 $H^{\alpha}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^N)$。对于 $\alpha > 0$，定义半范数 $|u|_{\alpha} = \||w|^{\alpha} \hat{u}\|_{L^2}$ 和范数 $\|u\|_{\alpha} =$

$(\|u\|_{L^2}^2+|u|_\alpha^2)^{1/2}$。令

$$H^\alpha=\overline{C_0^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)}^{\|\cdot\|_\alpha}$$

并且注意到，若 $u\in L^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)$ 是 $I_{-\infty}^\alpha$ 中的元素，当且仅当 $|\omega|^\alpha\hat{u}\in L^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)$。特别地，我们有 $|u|_{I_{-\infty}^\alpha}=\||\omega|^\alpha\hat{u}\|_{L^2}$。因此，$I_{-\infty}^\alpha$ 和 H^α 关于半范数和范数是等价的。

类似于 $I_{-\infty}^\alpha$，我们也可以定义 I_∞^α。定义半范数 $|u|_{I_\infty^\alpha}=|{}_xD_\infty^\alpha u|_{L^2}$ 和范数 $\|u\|_{I_\infty^\alpha}=(\|u\|_{L^2}^2+|u|_{I_\infty^\alpha}^2)^{\frac{1}{2}}$。

令

$$I_\infty^\alpha=\overline{C_0^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)}^{\|\cdot\|_{I_\infty^\alpha}}$$

同理可得 $I_{-\infty}^\alpha$ 和 H^α 关于半范数和范数是等价的。记 $C(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^N$ 上的连续函数空间，则可得如下的引理。

引理 1[2-3]　若 $\alpha>\dfrac{1}{2}$，则 $H^\alpha\subset C(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)$，且存在常数 $C=C_\alpha$ 使得

$$\|u\|_\infty=\sup_{t\in\mathbf{R}}|u(t)|\leqslant C\|u\|_\alpha$$

注 1　根据引理 1，由于

$$\int_{\mathbf{R}}|u(t)|^q\mathrm{d}t\leqslant\|u\|_\infty^{q-2}\|u\|_{L^2}^2$$

则可得 $u\in L^q(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)$，$\forall q\in[2,+\infty)$，如果 $u\in H^\alpha$，$\alpha\in(1/2,1)$。

记

$$X^\alpha:=\{u\in H^\alpha:\int_{\mathbf{R}}[|{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2+(L(t)u(t),u(t))]\mathrm{d}t<\infty\}$$

则 X^α 是一自反可分的 Hilbert 空间，其上的内积为

$$(u,v)_{X^\alpha}=\int_{\mathbf{R}}[({}_{-\infty}D_t^\alpha u(t),{}_{-\infty}D_t^\alpha v(t))+(L(t)u(t),v(t))]\mathrm{d}t$$

相对应的范数为

$$\|u\|_{X^\alpha}=\sqrt{(u,u)_{X^\alpha}}$$

为方便，简记 $(u,v)_{X^\alpha}=(u,v)$，$\|u\|_{X^\alpha}=\|u\|$。

引理 2[2-3]　若条件（L）成立，则 X^α 连续嵌入到 H^α。

引理 3[2-3]　若条件（L）成立，则嵌入 $X^\alpha\to L^q(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)(q\in[2,+\infty))$ 既是连续的又是紧的。

因此结合引理 1，对任意的 $q\in[2,+\infty]$，存在 C_q 使得

$$\|u\|_{L^q}\leqslant C_q\|u\|\tag{11}$$

令 $(X,\|\cdot\|)$ 是一 Banach 空间，$X=\overline{\oplus_{j\in\mathbf{N}}X_j}$ 且 $\dim X_j<\infty$，$\forall j\in\mathbf{N}$。记 $Y_k=\oplus_{j=1}^kX_j$，$Z_k=\overline{\oplus_{j=k}^\infty X_j}$

考虑 C^1 -泛函 $\Phi_\lambda:X\to\mathbf{R}$ 如下：

$$\Phi_\lambda(u)=A(u)-\lambda B(u),\lambda\in[1,2]\tag{12}$$

引理 4[10]　（12）式所定义的泛函 Φ_λ 满足：

（C1）对任意的 $\lambda\in[1,2]$，Φ_λ 映有界集为有界集，且

$$\Phi_\lambda(u)=\Phi_\lambda(-u),\forall(\lambda,u)\in[1,2]\times X;$$

（C2）$B(u)\geqslant0$，$\forall u\in X$，且 $A(u)\to\infty$ 或 $B(u)\to\infty$，$\|u\|\to\infty$；

（C3）存在 $r_k>\rho_k>0$ 使得

$$\alpha_k(\lambda)=\inf_{u\in\mathbf{Z}_k,\|u\|=\rho_k}\Phi_\lambda(u)>\beta_k(\lambda)=\max_{u\in Y_k,\|u\|=r_k}\Phi_\lambda(u),\quad\forall\lambda\in[1,2]$$

则

$$\alpha_k(\lambda)\leqslant\zeta_k(\lambda)=\inf_{\gamma\in\Gamma_k}\max_{u\in B_k}\Phi_\lambda(\gamma(u)),\quad\forall\lambda\in[1,2]$$

其中 $B_k=\{u\in Y_k:\|u\|\leqslant r_k\}$，$\Gamma_k=\{\gamma\in C(B_k,X):\gamma$ 是奇的，$\gamma|\partial B_k=Id\|\}$。并且，对几乎处处的 $\lambda\in[1,2]$，存在序列 $\{u_m^k(\lambda)\}_{m=1}^\infty$ 使得

$$\sup_m\|u_m^k(\lambda c)\|<\infty,\Phi'_\lambda(u_m^k(\lambda))\to0,$$
$$\Phi_\lambda(u_m^k(\lambda))\to\zeta_k(\lambda),m\to\infty$$

2　主要定理的证明

为了得到问题（1）弱解的存在性，在 X^α 上定义相应的能量泛函如下：

$$J(u)=\int_{\mathbf{R}}\left[\frac{1}{2}|{}_{-\infty}D_t^\alpha u(t)|^2+\frac{1}{2}(L(t)u(t),u(t))-W(t,u(t))\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\|u\|^2-B(u)\tag{13}$$

其中 $B(u)=\int_{\mathbf{R}}W(t,u(t))\mathrm{d}t$。根据条件（H1）和（11）式，存在 $d_3>0$，$d_4>0$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}}W(t,u(t))\mathrm{d}t\leqslant\int_{\mathbf{R}}(d_3|u|^2+d_4|u|^p)\mathrm{d}t=d_3\|u\|_{L^2}^2+d_4\|u\|_{L^p}^p\leqslant d_3C_2^2\|u\|^2+d_4C_p^p\|u\|^p<+\infty,\quad\forall(t,u)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N\tag{14}$$

结合（11）式可知 B 和 J 都是良定义的。更进一步，记 $(X^\alpha)^*$ 是 X^α 的对偶空间，根据文［11］中的引理 1，若条件（L）和（H1）成立，则 $B\in C^1(X^\alpha,\mathbf{R})$，$B':X^\alpha\to(X^\alpha)^*$ 是紧的，因而 $J\in C^1(X^\alpha,\mathbf{R})$，且对任意的 $u,v\in X^\alpha$，有

$$(B'(u),v)=\int_{\mathbf{R}}(\nabla W(t,u(t)),v(t))\mathrm{d}t,$$

$$(J'(u),v)=\int_{\mathbf{R}}[({}_{-\infty}D_t^\alpha u(t),{}_{-\infty}D_t^\alpha v(t))+(L(t)u(t),v(t))]\mathrm{d}t-\int_{\mathbf{R}}(W(t,u(t)),v(t))\mathrm{d}t$$

并由此可知，问题（1）的弱解就是能量泛函 J 的临界点。

注 2 注意到 X^α 是一 Hilbert 空间，令 $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ 是其一组规范正交基底，即 $\|e_i\|=1,(e_i,e_k)=0$，$1\leqslant i\neq k$。对于 $j,k\in\mathbf{N}$，定义 $X_j:=\operatorname{span}\{e_j\}$，$Y_k:=\oplus_{j=1}^k X_j$，$Z_k:=\overline{\oplus_{j=k}^\infty X_j}$。显然，$X^\alpha=\overline{\oplus_{j=N}^\infty X_j}$，且 $\dim X_j<\infty,\forall j\in\mathbf{N}$。

为了运用引理 4 来证明我们的结论，定义泛函 A，B 和 Φ_λ 如下：

$$A(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2,\ B(u)=\int_{\mathbf{R}}W(t,u(t))\mathrm{d}t,$$

$$\Phi_\lambda(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\lambda\int_{\mathbf{R}}W(t,u(t))\mathrm{d}t,u\in X^\alpha$$

引理 5 若条件（L），（H1）–（H2）成立，则存在 $\rho_k>0$ 使得

$$\alpha_k(\lambda)=\inf_{u\in\mathbf{Z}_k,\|u\|=\rho_k}\Phi_\lambda(u)>0$$

证明 根据条件（H1）–（H2），对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 C_ε 使得

$$W(t,u)\leqslant\varepsilon|u|^2+C_\varepsilon|u|^p,\forall(t,u)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$$

结合（11）式，有

$$\Phi_\lambda(u)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-\lambda\int_{\mathbf{R}}(\varepsilon|u|^2+C_\varepsilon|u|^p)\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2-\lambda\varepsilon C_2^2\|u\|^2-\lambda C_\varepsilon\|u\|_{L^p}^p$$

选取 $\varepsilon=(4\lambda C_2^2)^{-1}$，则

$$\Phi_\lambda(u)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|^2-\lambda C_\varepsilon\|u\|_{L^p}^p\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\|u\|^2-\lambda C_\varepsilon\beta_k^p\|u\|^p$$

其中 $\beta_k=\sup_{u\in\mathbf{Z}_k,\|u\|=1}\|u\|_{L^p}$。由于 $X^\alpha\to\to L^p(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)$，所以根据文［12］中的引理 3.8 有 $\beta_k\to0,k\to\infty$。从而若令 $\rho_k=(8\lambda C_\varepsilon\beta_k^p)^{\frac{1}{2-p}}$，则对任意的 $u\in\mathbf{Z}_k$，$\|u\|=\rho_k$，有

$$\Phi_\lambda(u)\geqslant\frac{1}{8}(8\lambda C_\varepsilon\beta_k^p)^{\frac{2}{2-p}}=\frac{1}{8}\rho_k^2>0$$

证毕。

引理 6 若条件（L），（H1）–（H3）成立，则存在 $r_k>0$ 使得

$$\beta_k(\lambda)=\max_{u\in Y_k,\|u\|=r_k}\Phi_\lambda(u)\leqslant0$$

证明 首先证明存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$\operatorname{meas}(\{t\in\mathbf{R}:|u(t)|^2\geqslant\varepsilon\|u\|^2\})\geqslant\varepsilon,$$

$$\forall u\in X\setminus\{0\},X\subset X^\alpha,\dim X<\infty\qquad(15)$$

否则对任意的 $n\in\mathbf{N}$，存在序列 $\{u_n\}\in X\setminus\{0\}$ 使得

$$\operatorname{meas}\left(\left\{t\in\mathbf{R}:|u_n(t)|^2\geqslant\frac{\|u_n\|^2}{n}\right\}\right)=0$$

记 $v_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则 $\|v_n\|=1$，且

$$\operatorname{meas}\left(\left\{t\in\mathbf{R}:|v_n(t)|^2\geqslant\frac{1}{n}\right\}\right)=0$$

由于 $\dim X<\infty$，在子列的意义下存在 $v_0\in X$ 使得 $v_n\to v_0$，且 $\|v_0\|=1$。从而存在 $\sigma_0>0$ 使得

$$\operatorname{meas}(\{t\in\mathbf{R}:|v_0(t)|^2\geqslant\sigma_0\})\geqslant\sigma_0\qquad(16)$$

否则的话，

$$\operatorname{meas}\left(\left\{t\in\mathbf{R}:|v_0(t)|^2\geqslant\frac{1}{n}\right\}\right)=0\qquad(17)$$

从而

$$0\leqslant\int_{\mathbf{R}}|v_0(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\|v_0(t)\|^2}{n}\to0,n\to\infty$$

这里表明 $v_0=0$，与 $\|v_0\|=1$ 矛盾。鉴于 $X^\alpha\to\to L^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^N)$，根据有限维空间上的任意范数均等价，有

$$\int_{\mathbf{R}}|v_n(t)-v_0(t)|^2\mathrm{d}t\to0,n\to\infty\qquad(18)$$

对任意的 $n\in\mathbf{N}$，定义

$$\Lambda_n=\left\{t\in\mathbf{R}:|v_n(t)|^2<\frac{1}{n}\right\},$$

$$\Lambda_n^c=\left\{t\in\mathbf{R}:|v_n(t)|^2\geqslant\frac{1}{n}\right\}$$

以及

$$\Lambda_0=\{t\in\mathbf{R}:|v_0(t)|^2\geqslant\sigma_0\}$$

从而对足够大的 n，有

$$\operatorname{meas}(\Lambda_n\cap\Lambda_0)=$$

$$\operatorname{meas}(\Lambda_0)-\operatorname{meas}(\Lambda_n^c)\geqslant\sigma_0>0$$

从而对足够大的 n，

$$\int_R|v_n(t)-v_0(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant\int_{\Lambda_n\cap\Lambda_0}|v_n(t)-v_0(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\int_{\Lambda_n\cap\Lambda_0}|v_0(t)|^2\mathrm{d}t-\int_{\Lambda_n\cap\Lambda_0}|v_n(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\left(\frac{1}{4}\sigma_0-\frac{1}{n}\right)\operatorname{meas}(\Lambda_n\cap\Lambda_0)\geqslant\frac{1}{8}\sigma_0^2>0$$

这与（18）式矛盾。矛盾表明（15）式成立。记 $\Lambda_u=\{t\in\mathbf{R}:|u(t)|^2\geqslant\varepsilon\|u\|^2\}$，则 $\operatorname{meas}(\Lambda_u)\geqslant\varepsilon$。

由于 $B(u)\geqslant0$，所以 $\Phi_\lambda\leqslant\Phi_1,\forall\lambda\in[1,2]$，所以只需要证明 $\max_{u\in Y_k,\|u\|=r_k}\Phi_1(u)\leqslant0$。反证法，则存在序列 $u_n\in Y_k$ 使得 $\Phi_1(u_n)>0$ 以及 $\|u_n\|\to\infty$，$n\to\infty$。根据条件（H3），存在足够大的 $M>\varepsilon^{-2}$（ε 由（15）式定义），存在 $C_M>0$ 使得

$$W(t,u) \geqslant \frac{M}{2}|u|^2 - C_M,$$
$$\forall (t,u) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$$

注意到 $\dim Y_k < \infty$，所以

$$0 < \frac{\Phi_1(u_n)}{\|u_n\|^2} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{M}{2}|u_n|^2 - C_M\right)\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\Lambda_{u_n}}\left(\frac{M}{2}|u_n|^2 - C_M\right)\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\Lambda_{u_n}}\left(\frac{M}{2}\varepsilon\|u_n\|^2 - C_M\right)\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\|u_n\|^2}\varepsilon\left(\frac{M}{2}\varepsilon\|u_n\|^2 - C_M\right)\mathrm{d}t < 0$$

这是矛盾的。矛盾表明 $\max_{u\in Y_k,\|u\|=r_k}\Phi_1(u) \leqslant 0$。证毕。

定理 1 的证明　根据（14）式知 Φ_λ 映有界集为有界集，对 $\lambda \in [1,2]$ 一致成立，再由条件（FHS3）知 Φ_λ 是偶泛函，所以引理 4 条件（C1）成立。显然 $A(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \to \infty$，$\|u\| \to \infty$，且由 $W \geqslant 0$ 知 $B(u) \geqslant 0$，$\forall u \in X^\alpha$，所以引理 4 条件（C2）成立。再者由引理 5，引理 6 知引理 4 条件（C3）亦成立。从而根据引理 4，对任意的 $k \geqslant 1$，对几乎所有的 $\lambda \in [1,2]$，存在序列 $\{u_m^k(\lambda)\}_{m=1}^{\infty}$ 使得

$$\sup_m\|u_m^k(\lambda)\| < \infty,\Phi'_\lambda(u_m^k(\lambda)) \to 0,$$
$$\Phi_\lambda(u_m^k(\lambda)) \to \zeta_k(\lambda), m\to\infty \tag{19}$$

其中 $\zeta_k(\lambda) = \inf_{\lambda\in\Gamma_k}\max_{u\in B_k}\Phi_\lambda(\gamma(u)), \forall \lambda \in [1,2], B_k = \{u \in Y_k: \|u\| \leqslant r_k\}, \Gamma_k = \{\gamma \in C(B_k, X^\alpha): \gamma$ 是奇的，$\gamma|_{\partial B_k} = Id\}$。并且由引理 5 的证明知

$$\zeta_k(\lambda) \in [\overline{\alpha_k}, \overline{\zeta_k}],\ \forall k \geqslant 1,$$

其中 $\overline{\zeta_k} = \max_{u\in B_k}\Phi_1(u), \overline{\alpha_k} = \frac{1}{8}\rho_k^2$。

由于序列 $\{u_m^k(\lambda)\}_{m=1}^{\infty}$ 是有界的，从而所有的 $k \geqslant 1$，可选取 $\lambda_n \to 1$ 使得该序列有强收敛子列。不失一般性，可假设

$$\lim_{m\to\infty}u_m^k(\lambda_n) = u_n^k, \forall n \in, k \geqslant 1$$

结合（19）式，有

$$\Phi'_{\lambda_n}(u_n^k) = 0,$$
$$\Phi_{\lambda_n}(u_n^k) \in [\overline{\alpha_k}, \overline{\zeta_k}], \forall n \in, k \geqslant 1 \tag{20}$$

下证 $\{u_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中有界，并且存在强收敛子列，记其极限为 $u^k \in X$。为简便起见，下记 $u_n = u_n^k$。反证法。若 $\{u_n\}$ 无界，在子列意义下，则 $\|u_n\| \to \infty, n\to\infty$。记 $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$，则 $\{v_n\}$ 在 X^α 中有界，从而存在子列，仍记为 $\{v_n\}$，和 $v_0 \in X^\alpha$ 使得

$$v_n \to v_0 \text{ 弱收敛于 } X^\alpha \tag{21}$$
$$v_n \to v_0 \text{ 强收敛于 } L^q(\mathbf{R},\mathbf{R}^N), q \in [2,+\infty) \tag{22}$$
$$v_n(t) \to v_0(t)\ a.e.\ t \in \mathbf{R} \tag{23}$$

注意到（19）式，存在 $M > 0$ 使得 $|\Phi_{\lambda_n}(u_n)| \leqslant M$，根据泛函 Φ_λ 的定义，有

$$\left|\lambda_n\int_{\mathbf{R}}\frac{W(t,u_n(t))}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\right| =$$
$$\frac{|-\Phi_{\lambda_n}(u_n)|}{\|u_n\|^2} \leqslant \frac{M}{\|u_n\|^2} \to 0 \tag{24}$$

以下分两种情况讨论：

第一种情况：v_0 不恒等于 0。

记 $\Lambda_{v_0} = \{t \in \mathbf{R}: |v_0(t)| > 0\}$，则 $\mathrm{meas}(\Lambda_{v_0}) > 0$。由于 $\|u_n\| \to 0$，所以在 Λ_{v_0} 中，$|u_n| \to \infty, n\to\infty$。根据条件（H3）和（22）－（23）式，可得

$$\lim_{|u_n|\to\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{W(t,u_n(t))}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}t \geqslant$$
$$\lim_{|u_n|\to\infty}\int_{\Lambda_{v_0}}\frac{W(t,u_n(t))}{|u_n(t)|^2}|v_n(t)|^2\mathrm{d}t = \infty$$

这与（24）式矛盾。

第二种情况：v_0 恒等于 0。

根据（24）式，注意到 $\lambda_n \to 1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{W(t,u_n(t))}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \tag{25}$$

另一方面，当 $|x| < L$ 时（L 由条件（H4）定义），由（14）式可得

$$W(t,x) \leqslant d_3|x|^2 + d_4|x|^p \leqslant$$
$$|x|^2(d_3 + d_4|x|^{p-2}) \leqslant (d_3 + L^{p-2})|x|^2$$

注意到条件（H2），存在 $d_5 > 0$ 使得

$$\frac{W(t,x)}{|x|^2} \leqslant d_5, \forall t \in \mathbf{R}, |x| < L$$

结合条件（H4），有

$$\frac{W(t,x)}{|x|^2} \leqslant \frac{1}{d_2}[(\nabla W(t,x),x) - 2W(t,x)] + d_5,$$
$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$$

从而由（22）－（23）式可知

$$\int_{\mathbf{R}}\frac{W(t,u_n(t))}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}}\frac{W(t,u_n(t))}{|u_n(t)|^2}|v_n(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\frac{1}{d_2}\int_{\mathbf{R}}[(\nabla W(t,u_n(t)),u_n(t)) - 2W(t,u_n(t))]\cdot$$
$$|v_n(t)|^2\mathrm{d}t + d_5\int_{\mathbf{R}}|v_n(t)|^2\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{d_2}\int_{\mathbf{R}}[2\Phi_{\lambda_n}(u_n) - (\Phi'_{\lambda_n}(u_n),u_n)]|v_n(t)|^2\mathrm{d}t +$$
$$d_5\int_{\mathbf{R}}|v_n(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{1}{d_2}\int_{\mathbf{R}}(2M+o(1))\,|v_n(t)|^2\mathrm{d}t+d_5\int_{\mathbf{R}}|v_n(t)|^2\mathrm{d}t\to 0$$

这与（25）式矛盾。

综上所述，$\{u_n\}$ 在 X^{α} 中有界，同理可证 $\{u_n\}$ 有强收敛子列。注意到（19）式，对 $k\geq 1$，极限 u^k 就是 Φ_1 的一个临界点，且 $\Phi_1(u^k)\in[\overline{\alpha_k},\overline{\zeta_k}]$。由于 k 取值的不同导致 $\overline{\zeta_k}$ 亦有不同的取值，从而问题（1）至少存在一个非平凡解。证毕。

参考文献：

[1] 郑祖庥. 分数微分方程的发展和应用[J]. 徐州师范大学学报(自然科学版), 2008, 26 (2): 1 – 10.

[2] TORRES C, Existence of solution for a class of fractional Hamiltonian systems [J]. arXiv: 1212. 5811v1, 2012.

[3] ZHANG Z, YUAN R. Variational approach to solutions for a class of fractional Hamiltonian systems [J]. Math Methods Appl Sci, 2014, 37(13): 1873 – 1883.

[4] XU J, O'REGAN D, ZHANG K. Multiple solutions for a class of fractional Hamiltonian systems [J]. Fract Calc Appl Anal, 2015, 18 (1): 48 – 63.

[5] CHEN J, TANG X. Inflnitely many solutions for a class of fractional boundary value problem [J]. Bull Malays Math Sci Soc, 2013, 36(4): 1083 – 1097.

[6] NYAMORADI N, Inflnitely many solutions for a class of fractional boundary value problems with Dirichlet boundary conditions [J], Mediterr J Math, 2014, 11(1): 75 – 87.

[7] JIAO F, ZHOU Y. Existence of solutions for a class of fractional boundary value problems via critical point theory [J]. Comput Math Appl, 2011, 62 (3): 1181 – 1199.

[8] GE B. Multiple solutions for a class of fractional boundary value problems [J]. Abstr Appl Anal, 2012, Article ID 468980.

[9] BAI C. Existence of three solutions for a nonlinear fractional boundary value problem via a critical points theorem [J]. Abstr Appl Anal, 2012, Article ID 963105.

[10] ZOU W M. Variant fountain theorems and their applications [J]. Manuscripta Math, 2001, 104 (3): 343 – 358.

[11] YE Y W, TANG C L. Multiple solutions for Kirchhoff-type equations in R^N [J]. J Math Phys, 2013, 54: Article ID 081508. http: // dx. doi. org/10. 1063/1. 4819249

[12] WILLEM M. Minimax theorems [M]. Boston: Birkhauser, 1996.